

Arkusz nr 11

Nierówności trygonometryczne. Funkcje cyklometryczne.

1. (3 pkt.) Wyznacz te rozwiązania nierówności, które należą do podanego przedziału.

a) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}, (0, \pi)$

b) $\cos x < \frac{1}{2}, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}, (0, \pi)$

d) $\operatorname{ctg} x > -1, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2. (3 pkt.) Wyznacz te rozwiązania nierówności, które należą do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

a) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} 2x > \sqrt{3}$

d) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} < 1$

3. (5 pkt.) Rozwiąż nierówność.

a) $\cos^2 x - \cos x < 0,75$

b) $3\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 3 < 0$

c) $\frac{\operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} < 0$

d) $2\cos x - 2\sin x < 1 - \operatorname{ctg} x$

3. (5 pkt.) Rozwiąż nierówność.

a) $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{8}$

b) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$

d) $3\sin 2x - 1 > \sin x + \cos x$

4. Narysuj wykres funkcji odwrotnej do funkcji danej wzorem

a) $f(x) = \sin x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f(x) = \cos x, x \in \langle 0, \pi \rangle$

b) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in (0, \pi)$

5. (3 pkt.) Narysuj wykres funkcji odwrotnych do funkcji danych wzorem. Jakich przekształceń wykresu należy dokonać, aby przekształcić wykres podanej funkcji cyklometrycznej do wykresu uzyskanej funkcji odwrotnej. Jaką można wywnioskować zależność pomiędzy wzorem otrzymanej funkcji odwrotnej, a wzorem danej funkcji cyklometrycznej?

a) $f(x) = \sin x, x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\rangle, g(x) = \arcsin x$

b) $f(x) = \sin x, x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\rangle, g(x) = \arccos x$

c) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), g(x) = \operatorname{arctg} x$

d) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), g(x) = \operatorname{arcctg} x$

6. (3 pkt.) Oblicz

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$	b) $\arcsin(1)$	d) $\arcsin(-1)$	d) $\arcsin(0)$
e) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$	f) $\arccos(-1)$	g) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	h) $\arccos(0)$
i) $\operatorname{arctg}(-1)$	j) $\operatorname{arctg}(0)$	k) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$	l) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7. (3 pkt.) Wyznacz dziedzinę funkcji

a) $y = \arcsin(1-x)$	b) $y = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$	c) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$
d) $y = \operatorname{arctg}(1-x^2)$	e) $y = \arcsin(\cos x)$	f) $y = \operatorname{arctg}(\log_2 x)$

8. (3 pkt.) Oblicz

a) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$	b) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$	c) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$
d) $\sin\left(\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{63}}{8}\right)$	e) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$	f) $\sin\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{17}{32}\right)$

9. (5 pkt.) Wykaż tożsamość

a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$	b) $\sin(\operatorname{arcctg}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
--	--

10. (5 pkt.) Wykaż, że

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$	b) $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$
---	---