Zadania optymalizacyjne w szkole ponadgimnazjalnej.

Materiały do przedmiotu Metodyka Nauczania Matematyki 2 (G-PG).
Prowadzący dr Andrzej Rychlewicz

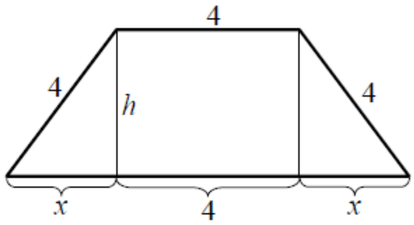
Przeanalizujmy następujące zadanie.

Zadanie 1. (próbna matura CKE 18 grudnia 2014)

Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Rozwiązanie.

Niech x oznacza długość rzutu prostokątnego ramienia trapezu na prostą zawierająca dłuższą podstawę trapezu, a h – wysokość trapezu.



Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $0 < x < 4$.
Przy tak przyjętych oznaczeniach pole trapezu jest określone wzorem:

$$P = \frac{2 \cdot 4 + 2x}{2} \cdot h = (4+x) \cdot h \quad \text{i } 0 < x < 4$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$x^2 + h^2 = 4^2,$$

stąd $h = \sqrt{16 - x^2}$.
Pole trapezu, w zależności od zmiennej x, jest określone wzorem:

$$P(x) = (4+x)\sqrt{16-x^2} = \sqrt{(4+x)^2(16-x^2)} =$$
$$= \sqrt{(4+x)^3(4-x)} = \sqrt{-x^4 - 8x^3 + 128x + 256}$$

gdzie $0 < x < 4$.
Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0 < x < 4$, funkcja P określona wzorem $P(x) = \sqrt{-x^4 - 8x^3 + 128x + 256}$ przyjmuje wartość największą.
Funkcja P osiąga wartość największą, gdy funkcja $f(x) = -x^4 - 8x^3 + 128x + 256$ osiąga w przedziale $(0, 4)$ wartość największą. Wystarczy więc zbadać funkcję f. Wyznaczmy pochodną tej funkcji

$$f'(x) = -4x^3 - 24x^2 + 128$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = x_2 = -4$, $x_3 = 2$
Ponadto:

- $f'(x) > 0$ w przedziale $(0, 2)$,
- $f'(x) < 0$ w przedziale $(2, 4)$

Zatem funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $\left(0,2\right\rangle$ i malejąca w przedziale $\left\langle 2,4\right)$.

Ponieważ $P(x)=\sqrt{f(x)}$ dla $x\in(0,4)$, więc funkcja *P* jest rosnąca w przedziale $\left(0,2\right\rangle$, a malejąca w przedziale $\left\langle 2,4\right)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=2$ funkcja *P* przyjmuje wartość największą.

Gdy $x=2$, to $2x+4=8$, czyli dłuższa podstawa trapezu ma długość 8, a pole tego trapezu jest wówczas równe

$$P(2)=(4+2)\cdot\sqrt{16-2^2}=6\cdot 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Największe pole, równe $12\sqrt{3}$ dm^2, ma szyba w kształcie trapezu, którego dłuższa podstawa ma długość 8 dm.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania:

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wybór zmiennej *x* (długość rzutu prostokątnego ramienia trapezu na prostą zawierająca dłuższą podstawę trapezu) i zapisanie za pomocą tej zmiennej wysokości trapezu: $h=\sqrt{16-x^2}$

b) zapisanie pola trapezu w zależności od zmiennej *x*: $P(x)=(4+x)\sqrt{16-x^2}$

c) określenie dziedziny funkcji *P*: $(0,\ 4)$

Zdający może otrzymać maksymalnie po **1 punkcie** za realizację każdej z części tego etapu, przy czym dziedzina funkcji nie może wynikać jedynie z wyznaczonego wzoru funkcji, ale z geometrycznych warunków zadania.

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $f(x)=-x^4-8x^3+128x+256$: $f'(x)=-4x^3-24x^2+128$,

b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1=x_2=-4$, $x_3=2$,

c) uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja *P* osiąga wartość największą w punkcie $x=2$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Trzeci etap.

Obliczenie pola trapezu dla $x=2$: $P(2)=12\sqrt{3}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt.

Ćwiczenie 1. Na jakie elementy rozwiązania należy zwrócić szczególną uwagę, aby nie stracić punktów według zamieszczonego wyżej schematu oceniania podanego zadania?

Łatwo zauważyć, że istotnym elementem jest zapisanie dziedziny odpowiedniej funkcji i uzasadnienie, że funkcja osiąga ekstremum globalne.

Ćwiczenie 2. Zapisz rozwiązanie zadania 1, wykorzystując udowodnione poniżej twierdzenia.

***Twierdzenie* 1**. Niech funkcja ciągła $f:\langle a,b\rangle\to R$ będzie różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) i niech $\{x\in(a,b):\ f'(x)=0\}=\{x_1,\ldots,x_k\}$. Wtedy do zbioru $A=\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ldots,\ f(x_k)\}$ należy największa wartość funkcji *f* w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. istnieje $z \in \langle a, b\rangle \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ takie, że $f(z)$ jest największą wartością funkcji *f* w przedziale $\langle a, b\rangle$. Wtedy, ponieważ zbiór $\{x_1, \ldots, x_k\}$ jest skończony i $z\in(a, b)$, więc istnieje otoczenie *U* punktu *z* takie, że $U \subset \langle a, b\rangle$, $U \cap \{x_1, \ldots, x_k\} = \emptyset$ i dla każdego $x \in U \setminus \{z\}$ zachodzi $f(x)<f(z)$. Wynika stąd, że funkcja *f* ma w punkcie z maksimum lokalne, a więc $f'(z) = 0$. Zatem $z \in \{x_1, \ldots, x_k\}$. Sprzeczność z definicją liczby z.□

***Twierdzenie* 2**. Niech funkcja <u>ciągła</u> $f : \langle a, b\rangle \to R$ będzie różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b). Niech $B = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\} = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Jeśli największy element zbioru $A = \{ f(x_1), \ldots, f(x_k)\}$ (oznaczmy go przez $f(x_n)$) nie jest mniejszy od każdej z granic $\lim\limits_{x\to a+} f(x), \lim\limits_{x\to b-} f(x),$ to $f(x_n)$ jest największą wartością funkcji *f* w przedziale (a, b).

Dowód. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy założyć, że $x_1 < x_2 \ldots < x_k$. Z twierdzenia 1. wynika, że $f(x_n)$ jest największą wartością funkcji *f* w przedziale $\langle x_1, x_k\rangle$. Ponieważ $(a, x_1) \cap B = \emptyset$, to z własności Darboux pochodnej

$$(f'(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in (a, x_1)) \text{ lub } (f'(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in (a, x_1)).$$

Rozważmy dwa przypadki.

1. Niech $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, x_1)$. Wtedy funkcja *f* jest funkcją malejącą w przedziale (a, x_1). Zatem $\lim\limits_{t\to a+} f(t) \geq f(x)$ dla każdego $x \in (a, x_1)$. Stąd na mocy założenia mamy $f(x_n) \geq \lim\limits_{t\to a+} f(t) \geq f(x)$ dla każdego $x \in (a, x_1)$.

2. Niech $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, x_1)$. Wtedy funkcja *f* jest funkcją rosnącą w przedziale (a, x_1). Z ciągłości funkcji *f* wynika, że $f(x_1) \geq f(x)$ dla każdego $x \in (a, x_1)$. Zatem $f(x_n) \geq f(x)$ dla każdego $x \in (a, x_1)$.

Analogicznie można pokazać, że $f(x_n) \geq f(x)$ dla każdego $x \in (x_k, b)$.

Dowód został zakończony.

Zadanie 2. Punkty *A*, *B* i *C* o odciętych (tzn. pierwszych współrzędnych) odpowiednio równych $-2, -1$ i x_0, gdzie $x_0 > 0$, leżą na wykresie funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Jakie może być najmniejsze pole trójkąta *ABC*?

Uwaga. Rozwiązując zadanie możemy uzyskać następującą funkcję pola trójkąta *ABC*. Funkcja pola $P(x) = 3 + \frac{x^2 + 2}{x}$. Wystarczy teraz wykorzystać opisane wyżej metody i wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji w zbiorze $(0, +\infty)$. Ciekawostką jest to, że można skorzystać także skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego dla średnich. Zauważmy, że

$\frac{x^2+2}{x} = \frac{2x+\frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}} = 2\sqrt{2}$. Wynika stąd, że $P(x) \geq 3+2\sqrt{2}$. Najmniejsza wartość jest *de facto* wtedy, gdy $2x = \frac{4}{x}$, a więc gdy $x = \sqrt{2}$ i jest równa $3+2\sqrt{2}$. To samo można uzyskać korzystając z rachunku różniczkowego.

Kolejna metoda polega na skorzystaniu z własności funkcji kwadratowej.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż zadanie 3, korzystając z własności funkcji kwadratowej.

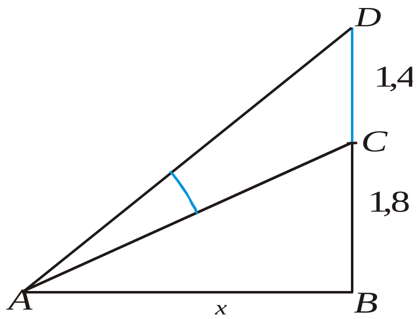
Zadanie 3. W trójkącie *ABC* długość boku *AB* jest równa 4, miara kąta $\angle BAC$ jest równa 45^0 oraz tangens kąta przy wierzchołku *B* jest równy 2. Kwadrat o polu 9, którego jeden z boków całkowicie leży na boku *AB* trójkąta przesuwamy wzdłuż boku *AB*. W jakiej odległości od wierzchołka *A* należy umieścić najbliższy mu wierzchołek kwadratu, aby pole części wspólnej trójkąta i kwadratu było największe?

Ćwiczenie 4. Rozwiąż zadania 4.-10.

Zadanie 4. Jakie powinny być wymiary puszki w kształcie walca o pojemności 108π, aby do jej produkcji zużyć jak najmniej blachy? Grubość blachy należy zaniedbać.

Zadanie 5. Prostopadłościan wpisano w kulę o promieniu *r*. Podstawa tego prostopadłościanu ma pole 16. Podaj wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

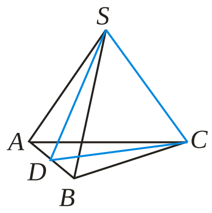
Zadanie 6. Obraz o wysokości 1,4 m zawieszony jest na ścianie w muzeum tak, że jego dolny brzeg znajduje się 1,8 m powyżej oczu oglądającego go turysty. W jakiej odległości od ściany powinien stanąć turysta, aby mógł najlepiej obejrzeć obraz, tzn. kąt widzenia obrazu był największy?



Zadanie 7. Na stronie książki tekst powinien zajmować S cm^2. Prawy i lewy margines mają po *a* cm, a górny i dolny po *b* cm. Jakie powinny być wymiary strony, aby zużycie papieru było najmniejsze?

Zadanie 8. Przedpokój ma kształt litery Γ i składa się z dwóch prostokątnych korytarzy o szerokościach 1 i 8 metrów. Jaką największą długość może mieć stalowy pręt, który można przesunąć po podłodze przedpokoju w miejscu jego załamania. W celu ułatwienia obliczeń przyjmij, że grubość pręta jest zerowa.

Zadanie 9. Ostrosłup *ABCS* jest ostrosłupem prawidłowym. Obwód trójkąta *DCS*, gdzie *D* jest środkiem krawędzi $\overline{AB}$, jest równy 6. Jakie największe pole powierzchni bocznej może mieć taki ostrosłup?



Zadanie 10. Dany jest ostrosłup *ABCS*, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości 4. Krawędź boczna $\overline{AS}$ jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ostrosłupa i ma długość równą 2. Niech *M* będzie takim punktem krawędzi $\overline{AB}$, że $\left|\overline{AM}\right| < 2$. Przez punkt *M* prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do prostej *AB*. Dla jakiej wartości $x = \left|\overline{AM}\right|$ długość przekątnej czworokąta, który jest częścią wspólną poprowadzonej płaszczyzny i ostrosłupa *ABCS* jest najmniejsza?