Algebra z teorią liczb w nauczaniu szkolnym

Arkusz 1.

Prowadzący: Andrzej Rychlewicz

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie cyfry *a* i *x*, dla których
a) liczba $2378a932x1$ jest podzielna przez liczbę 9.
b) $326a89x$ jest podzielna przez 21.

Zadanie 2. Wykaż, że nie istnieje takie *n*, że liczba $(3n+2)^2+4$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 3. Wykaż, że liczba całkowita postaci $10n+u$, gdzie u jest cyfrą, jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy $7 \mid 5n+4u$.

Zadanie 4. Niech $x, y, z \in Z$. Wykaż, że

a) $23 \mid 8x+9y \Leftrightarrow 23 \mid 7x+5y$;

b) $13 \mid 2x+3y+z \Leftrightarrow 13 \mid 5x+y+9z \Leftrightarrow 13 \mid 7x+4y+10z$.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie *d*, dla których istnieje liczba naturalna *n* taka, że $d \mid n^2+2 \wedge d \mid (n+1)^2+5$.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli liczba $abcd_{10}$ jest podzielna przez 101, to liczba $bcda_{10}$ też jest podzielna przez 101.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli liczba $abcd_{10}$ jest podzielna przez 101, to liczba $cdab_{10}$ też jest podzielna przez 101.

Zadanie 8. Wyznacz wszystkie liczby całkowite *n* o tej własności, że liczba *a* powstała z liczby *n* w wyniku skreślenia cyfry jedności liczby *n* jest dzielnikiem liczby *n*.

Zadanie 9. Wyznacz liczbę wszystkich liczb całkowitych z przedziału $(0, 10^8)$, o cyfrach ze zbioru $\{0, 1\}$ i podzielnych przez 6.