

ARKUSZ 10

Funkcja logarytmiczna

Teorię, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach (dostępnych w czytelnicy biblioteki wydziałowej - zachęcamy do ich czytania)

1. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żyłak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona, dział "Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne", rozdziały: 8.6, 8.7, 8.8.
2. M. Fabijańczyk, A. Fabijańczyk, *Matematyka elementarna, kompendium wiedzy z wybranych działów*, Wydawnictwo UŁ, dział "Funkcje logarytmiczne".

(3 pkt.)Zadanie 10.1 Oblicz:

- a) $\log_2 16$; c) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; e) $\log_3 9^{21}$; g) $\log_{\frac{1}{7}} 7^{15}$;
b) $\log_5 \frac{1}{25}$; d) $\log_{2,5} 0,16$; f) $8^{\log_2 7}$; h) $\log_4 2^{26}$.

(3 pkt.)Zadanie 10.2 Wyznacz x , jeśli:

- a) $\log_3 x = 2$; b) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$; c) $\log_x 8 = 3$; d) $\log_x 2^{\frac{1}{4}} = -1$.

(3 pkt.)Zadanie 10.3 Uzasadnij, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ zachodzi równość $\log_{a^2} b \cdot \log_{b^2} a = \frac{1}{4}$.

(3 pkt.)Zadanie 10.4 Oblicz:

- a) $\log_3(x^3y)$, jeśli $\log_3 x = 0,2$ i $\log_3 y = 4$;
b) $\log_5 \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{5y^4}$, jeśli $\log_5 x = 3$ i $\log_5 y = \frac{2}{5}$.

(3 pkt.)Zadanie 10.5 (c.f. [1]) Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

- a) $f(x) = \log_3(x-3)$; c) $f(x) = \log x^2 + \log|x+1|$; e) $f(x) = \log_x(3-x)$;
b) $f(x) = \log_2(1-x^2)$; d) $f(x) = \frac{\log_2(x+4)}{\log_5 x}$; f) $f(x) = \log_{(2-x)}(2x+1)$.

(3 pkt.)Zadanie 10.6 (c.f. [1]) Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem.

- a) $f(x) = \log_2(x-3)$; c) $f(x) = \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$; e) $f(x) = |1 + \log_2|x||$;
b) $f(x) = \log_2 \frac{16}{x}$; d) $f(x) = \frac{|\log_7 x|}{\log_7 \sqrt{x}}$; f) $f(x) = 2 - \log_2|x-4|$.

(3 pkt.)Zadanie 10.7 (c.f. [2]) Rozwiąż równanie.

- a) $\log_3 \frac{2x-1}{x+2} = -1$; b) $\log_{(x-2)} 3 = 2$; c) $\log_{(x+1)}(4x+4) = 2$.

(5 pkt.)Zadanie 10.8 Rozwiąż równanie.

a) $\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$;

c) $\frac{3}{2-\log_6 x} + \frac{5}{2+\log_6 x} = 4$;

b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$;

d) $\log_3^2 x + 2\log_3 x = 3$.

(3 pkt.)Zadanie 10.9 (c.f. [2]) Rozwiąż nierówność.

a) $\log(x^2 + 6) > 1$;

b) $\log_{0.6}(2x - 1) \geq 1$;

c) $2\log_5 x \leq \log_5 2x$.

d) $\log_x 4 < 8$.

(5 pkt.)Zadanie 10.10 (c.f. [2]) Rozwiąż nierówność.

a) $\log_{\frac{1}{5}} \log_4(x^2 - 5) > 0$;

c) $\log_x \sqrt{x + 12} < 1$;

b) $\log_{(x+2)}(5 - x) > \log_{(x+2)}(2x + 3)$;

d) $\log_x(3 - 2x) \geq 2$.

(5 pkt.)Zadanie 10.11 ([2]) Wyznacz wzór funkcji logarytmicznej f , jeśli zbiorem rozwiązań nierówności

a) $f(x) < 2$ jest przedział $(0, 3)$;

c) $f(x) < -2$ jest przedział $(2\frac{1}{4}, +\infty)$;

b) $f(x) \geq -4$ jest przedział $(0, 16]$;

d) $f(x) \leq 6$ jest przedział $[\frac{1}{8}, +\infty)$.

(5 pkt.)Zadanie 10.12 Zaznacz na płaszczyźnie zbiór $\{(x, y) : \log_x y = \log_y x\}$.

(5 pkt.)Zadanie 10.13 Dla jakich a równanie $2\log(x + 3) = \log(ax)$ posiada jeden pierwiastek?

Literatura

- [1] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona
- [2] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona