

ARKUSZ 9

Funkcja wykładnicza

Teorię, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach (dostępnych w czytelnicy biblioteki wydziałowej - zachęcamy do ich czytania)

1. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żyłak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona, dział "Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne", rozdziały: 8.4, 8.5.
2. M. Fabijańczyk, A. Fabijańczyk, *Matematyka elementarna, kompendium wiedzy z wybranych działów*, Wydawnictwo UŁ, dział "Funkcje wykładnicze".

(3 pkt.)Zadanie 9.1 Oblicz:

a) $(\frac{1}{3})^{-3} + 25^{\frac{1}{2}} - 16^{-\frac{3}{4}}$; b) $\frac{(-\frac{2}{3})^{-4} - 2^{-4}}{(-3)^3 - (-\frac{1}{2})^{-5}}$; c) $\frac{(-3)^0 - (-\frac{2}{3})^{-3}}{2^{-5} + (\sqrt{2})^2}$.

(3 pkt.)Zadanie 9.2 Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; c) $(3 + \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} \cdot (3 - \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} = 2$;
b) $\sqrt[3]{34\sqrt{2} + 27\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$; d) $(7 + 4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}} = 1$.

(3 pkt.)Zadanie 9.3 Podaj warunki określające dziedzinę wyrażenia:

a) $\frac{(-a)^{\frac{1}{3}} \cdot b^7}{(ab)^{\frac{1}{2}}}$; b) $\frac{x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{1}{3}}}{x-y}$; c) $\frac{(x+2y)^{\frac{1}{2}}}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}$.

(3 pkt.)Zadanie 9.4 Narysuj wykres funkcji f określonej w zbiorze A , jeśli:

a) $f(x) = x^4, A = [-1, \sqrt{2}]$; c) $f(x) = x^3, A = [-2, 2]$;
b) $f(x) = x^{-2}, A = [-2, 0) \cup (0, 2]$; d) $f(x) = x^{-1}, A = [-4, 0) \cup (0, 2]$.

(5 pkt.)Zadanie 9.5 Naszkicuj, w jednym układzie współrzędnych, wykresy funkcji f i g określonych podanymi wzorami. Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq g(x)$.

a) $f(x) = x^{-1}, g(x) = x^{-4}$; c) $f(x) = x^2, g(x) = x^{\frac{2}{3}}$;
b) $f(x) = x^3, g(x) = x^{-3}$; d) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}, g(x) = x^3$.

(3 pkt.)Zadanie 9.6 ([?]) Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem.

a) $f(x) = 1 - 2^{1-x}$; b) $f(x) = 3^{x-1}$; c) $f(x) = 2^{|x-1|}$.

(3 pkt.)Zadanie 9.7 ([?]) Podaj równanie asymptoty wykresu funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = 2^{-x+1} - 4$; b) $f(x) = 6 \cdot 6^{\frac{1}{2}x-1} + 2$; c) $f(x) = 3 - 4^{2-3x}$.

(3 pkt.)Zadanie 9.8 (c.f. [?]) Rozwiąż równanie.

a) $2^{x^2-3} = 0,25$;

c) $3 \cdot 4^{x-2} + 4^x = 76$;

e) $8^x - 4^{x+1} + 2^x = 4$;

b) $6^{x+3} + 1 = 0$;

d) $2 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-\frac{1}{2}} = 1$;

f) $6^x - 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x + 18 = 0$.

(5 pkt.)Zadanie 9.9 Rozwiąż równanie.

a) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;

d) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$;

b) $6^{1+x} + 6^{1-x} = 37$;

e) $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$;

c) $3^x - 2^{x+2} = 3^{x-1} - 2^{x-1} - 2^{x-3}$;

f) $2^{2x^2+4x+6} - 9 \cdot 2^{x^2+2x+3} + 64 = 0$.

(3 pkt.)Zadanie 9.10 (c.f. [?], [?]) Rozwiąż nierówność.

a) $5^{x-2} \geq 5^{2x}$;

c) $(0,3)^{2-x} < (0,3)^{x^2}$;

e) $3^{2x-3} < \frac{1}{9}$;

b) $\frac{1}{2^x} + 1 \leq 0$;

d) $(\frac{1}{3})^{x^2+2x} < (\frac{1}{9})^{16-x}$;

f) $3^{x+2} < 3^{x-1} + 26$.

(5 pkt.)Zadanie 9.11 (c.f. [?]) Rozwiąż nierówność.

a) $6^x - 2^x \geq 2^{x+3}$

c) $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geq 9 - 3^x$;

e) $4 \cdot 10^x + 2^{x+2} - 5^x - 1 \geq 0$.

b) $(0,1)^{x+1} < 0,8 + 2 \cdot 10^x$;

d) $(\frac{1}{16})^x + (\frac{1}{4})^{2x-2} > 68$;

(5 pkt.)Zadanie 9.12 ([?]) Wyznacz wzór funkcji wykładniczej f , jeśli zbiorem rozwiązań nierówności

a) $f(x) \leq 9$ jest przedział $[-2, +\infty)$;

c) $f(x) < 1\frac{1}{2}$ jest przedział $(-\frac{1}{2}, +\infty)$;

b) $f(x) > 12$ jest przedział $(2, +\infty)$;

d) $f(x) \geq 4\frac{1}{2}$ jest przedział $(-\infty, -2]$.

(5 pkt.)Zadanie 9.13 ([?]) Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m .

a) $5^{3x-1} - m = 0$;

b) $m \cdot 3^x + 3 = 0$;

c) $3^{x-m} + m = 0$.

(5 pkt.)Zadanie 9.14 Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ równanie $(m+2) \cdot 2^{2x-1} - m \cdot 2^{x+1} + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

(5 pkt.)Zadanie 9.15 Określ liczbę rozwiązań równania $p(4^x - 2^x) = 1 - p$ w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

(5 pkt.)Zadanie 9.16 ([?]) Dla jakich wartości parametru m podana nierówność ma co najmniej jedno rozwiązanie?

a) $3^{2x-m} - 3^m < 0$;

b) $8^x + 4^m - 2^{1-m} < 0$;

c) $m \cdot 2^x + m - 1 < 0$.

Literatura

- [1] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żyłak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona
- [2] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żyłak, *Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona