ARKUSZ 8

Wielomiany 2

Teorię, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach (dostępnych w czytelni biblioteki wydziałowej - zachęcamy do ich czytania)

1. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona, dział "Wielomiany i funkcje wymierne", rozdziały: 2.5, 2.6, 2.8, 2.11.
2. M. Fabijańczyk, A. Fabijańczyk, *Matematyka elementarna, kompendium wiedzy z wybranych działów*, Wydawnictwo UŁ, dział "Wielomiany", rozdział 7.3 oraz dział "Funkcje wymierne", rozdział 8.2.

(3 pkt.)Zadanie 8.1 *Rozwiąż równanie:*

a) $12x^4 - 8x^5 - 40x^3 + 60x^2 + 8x - 12 = 0;$

b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0;$

c) $(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x - 1) = -6;$

d) $(x^4 - 5x^2 + 6)^2 - 14(x^4 - 5x^2 + 2) = 32.$

(3 pkt.)Zadanie 8.2 (c.f. [2]) *Rozwiąż nierówność:*

a) $(x^2 + 5x + 4)(x^2 - 3x + 2) \geqslant 0;$

b) $(x + 2)^2(x - 3)^4 \leqslant 0;$

c) $x^3 + 3x - 4 < 0;$

d) $6x^4 - x^3 + 10x^2 - 2x - 4 < 0.$

(3 pkt.)Zadanie 8.3 *Dla jakich wartości parametru m równanie $m^2x^3 + (m^2 + 6m)x^2 + (m + 6)x = 0$ ma trzy różne pierwiastki?*

(5 pkt.)Zadanie 8.4 (c.f. [2]) *Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności wielomianowej $Q(x) < 0$. Rozwiąż nierówność:*

a) $(x + 2)Q(x) > 0$, *jeśli* $A = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ *i wielomian* $Q(x)$ *ma dwa pierwiastki;*

b) $x(x - 1)Q(x) \geqslant 0$, *jeśli* $A = (0, 3) \cup (3, +\infty)$ *i wielomian* $Q(x)$ *ma dwa pierwiastki;*

c) $(x - 1)Q(x) \leqslant 0$, *jeśli* $A = (-2, 2) \cup (2, 4)$ *i wielomian* $Q(x)$ *ma trzy pierwiastki;*

d) $(x^2 - 4)Q(x) \geqslant 0$, *jeśli* $A = (-2, 2) \cup (5, +\infty)$ *i wielomian* $Q(x)$ *ma trzy pierwiastki.*

(5 pkt.)Zadanie 8.5 (c.f. [2]) *Wyznacz wartość parametru m, dla której zbiorem rozwiązań nierówności $(x^2 - 3mx + 2m^2)(x^2 - mx - 4) \geqslant 0$ jest zbiór:*

a) $(-\infty, -1] \cup [3, 4] \cup [6, +\infty);$

b) $(-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty).$

(5 pkt.)Zadanie 8.6 *Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $(x^2 - 2x + m - 2)(|x - 1| - m + 1) = 0$ ma dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste.*

(3 pkt.)Zadanie 8.7 (c.f. [2]) *Wyznacz dziedzinę podanego wyrażenia. Wykonaj działania i zapisz otrzymane wyrażenie w możliwie najprostszej postaci.*

a) $\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2}$*;*

b) $\frac{3}{x^2-3x} - \frac{2}{x^2+3x}$*;*

c) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{(x-1)^2}$*;*

d) $\frac{4s^2+11s-3}{s-1} : \frac{4s^2-9s+2}{-2s^2-3s+5}$.

(3 pkt.)Zadanie 8.8 (c.f. [2]) *Rozwiąż równanie*

a) $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x}$*;*

b) $\frac{2}{x-3} = \frac{x}{x^2-9}$*;*

c) $\frac{x+3}{x^3-x} = \frac{2}{x^2-1}$*;*

d) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+1}$*;*

e) $\frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2+2x} = 2$*;*

f) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{x^3-1} = 0$.

(3 pkt.)Zadanie 8.9 (c.f. [2]) *Rozwiąż nierówność:*

a) $\frac{x}{2x-1} \leqslant 1$*;*

b) $3 - \frac{2x}{5-2x} \leqslant 0$*;*

c) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2} \leqslant \frac{4}{x-2}$*;*

d) $\frac{x^3+2x^2+4x}{x^3-8} - \frac{1}{x+1} \leqslant 1$*;*

e) $3 < \frac{x}{x+1} < 5$*;*

f) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x} < \frac{1}{x-4}$.

(5 pkt.)Zadanie 8.10 (c.f. [2]) *Rozwiąż wprowadzając pomocniczą niewiadomą* t

a) $\frac{4x^2}{x^2-4x+4} + 1 = \frac{4x}{x-2}$, $t = \frac{2x}{x-2}$*;*

b) $\frac{(2-x)^3}{(x+1)^3} = \frac{2-x}{x+1}$, $t = \frac{2-x}{x+1}$*;*

c) $\frac{1}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x-2} + 3 < 0$, $t = \frac{1}{x-2}$*;*

d) $\left(2 - \frac{1}{x}\right)^3 \geqslant 8 - \frac{4}{x}$, $t = 2 - \frac{1}{x}$.

(5 pkt.)Zadanie 8.11 (c.f. [2]) *Rozwiąż równanie* $\left|\frac{x-3}{x^2-2}\right| = x - 3$.

(5 pkt.)Zadanie 8.12 (c.f. [2]) *Rozwiąż nierówność* $\left|\frac{x+2}{x^2-1}\right| \leqslant x + 2$.

(5 pkt.)Zadanie 8.13 ([2]) *Dla jakich wartości parametru* m *równanie* $\frac{mx^2+1}{x+m} = 1$ *ma dwa różne pierwiastki należące do przedziału* $[1, 3]$*?*

(5 pkt.)Zadanie 8.14 *Dla jakich wartości parametru* m *nierówność* $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4} > -1$ *jest prawdziwa dla wszystkich wartości* $x \in \mathbb{R}$.

(5 pkt.)Zadanie 8.15 (c.f. [2]) *Dla jakich wartości parametru* m *zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności:*

a) $\frac{m}{x^2+x+3} < 1$*;*

b) $\frac{3x^2+mx+2m}{x^2+1{,}5} > 2$*;*

c) $-1 < \frac{x^2+mx}{x^2+x+2} < 2$?

Literatura

[1] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona

[2] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Ryhclewicz, K. Żylak, *Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum*, Res Polona