

ARKUSZ 7

Wielomiany 1

Teorię, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach (dostępnych w czytelní biblioteki wydziałowej - zachęcamy do ich czytania)

1. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żyłak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona, dział "Wielomiany i funkcje wymierne", rozdziały: 2.1 - 2.5.
2. M. Fabijańczyk, A. Fabijańczyk, *Matematyka elementarna, kompendium wiedzy z wybranych działów*, Wydawnictwo UŁ, dział "Wielomiany", rozdziały: 7.1, 7.2.

Zadanie 7.1 (c.f [2]) Dane są wielomiany: $P(x) = x^3 - x + 2$, $Q(x) = -x^2 + 2x - 3$, $R(x) = x - 2$. Wykonaj działania i uporządkuj rosnąco wielomiany.

- a) $W(x) = P(x) + Q(x)$; d) $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$; g) $W(x) = R(x) \cdot (P(x) + Q(x))$;
b) $W(x) = R(x) \cdot P(x)$; e) $W(x) = R(x) \cdot P(x) \cdot Q(x)$; h) $W(x) = x^2 R(x) - P(x)$;
c) $W(x) = P(x) + xQ(x)$; f) $W(x) = (x-1)(P(x) - R(x))$; i) $W(x) = (x+1)(P(x) - Q(x))$.

Zadanie 7.2 ([2]) Dla jakich a, b, c wielomiany P i Q są równe?

- a) $P(x) = (x^2+1)(2x-1)$ i $Q(x) = ax^3 - x^2 + bx + c$; b) $P(x) = (x^3+a)(x+1)$ i $Q(x) = (x^2+b)(x^2+x+c)$.

(3 pkt.)Zadanie 7.3 (c.f [2]) Liczby m i n są odpowiednio równe stopniom wielomianów P i Q . Określ stopień wielomianu

- a) $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, jeśli $n = 2$ i $m = 3$;
b) $W(x) = P(x) + 2Q(x)$, jeśli $n = 3$ i $m = 6$;
c) $W(x) = x^2 P(x) + 3Q(x) - x^3$, jeśli $n = 2$ i $m = 3$;
d) $W(x) = (x-2)^2 P(x) - (x-1)^3 Q(x)$, jeśli $n = 5$ i $m = 6$.

(3 pkt.)Zadanie 7.4 (c.f. [2]) Wykonaj dzielenie wielomianu $P(x)$ przez wielomian $Q(x)$.

- a) $P(x) = 2x^2 - x + 3$, $Q(x) = x + 2$; d) $P(x) = (3x^5 + 3x^3 + x^2 + 1)(x-2)$, $Q(x) = x^2 + 1$;
b) $P(x) = 2x^5 - x^3 + 2x - 2$, $Q(x) = x - 1$; e) $P(x) = x^7 - 4x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x$, $Q(x) = x^3 - 4x - 1$;
c) $P(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 4$, $Q(x) = x^2 - 1$;

(3 pkt.)Zadanie 7.5 ([2]) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 2$ jest równa 3. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $\frac{1}{2}x - 1$.

(3 pkt.)Zadanie 7.6 ([2]) Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez dwumian $x^2 - 1$ wiedząc, że $P(1) = 1$ i $P(-1) = -1$.

(3 pkt.)Zadanie 7.7 Dla jakich liczb a i b wielomian $ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ jest podzielny przez $x^2 - 5x + 6$?

(3 pkt.)Zadanie 7.8 Dla jakich liczb a i b wielomian $x^2 - bx + 1$ jest dzielnikiem $x^3 - x^2 + bx + a$?

(5 pkt.)Zadanie 7.9 ([2]) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ trzeciego stopnia przez dwumian $x^2 + 1$ jest równa $x - 1$. Reszta z dzielenia tego wielomianu przez trójmian kwadratowy $x^2 + x + 1$ jest dwumianem $4x + 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$.

Zadanie 7.10 ([2]) Uzasadnij, że w zbiorze wszystkich wielomianów trzeciego stopnia nie jest wykonalne dodawanie.

Zadanie 7.11 ([2]) Uzasadnij, że w zbiorze wszystkich wielomianów drugiego stopnia nie jest wykonalne dzielenie.

(3 pkt.)Zadanie 7.12 (c.f. [2]) Zapisz wielomian w postaci iloczynowej

- a) $P(x) = x^2(x^2 - 5x + 4) - 4(x^2 - 5x + 4)$; d) $P(x) = (9x^2 - 4)(x^3 + 1)(x + 1)$;
 b) $P(x) = x^2(x^2 + 2x) + x(x^2 + 2x) - 2(x^2 + 2x)$; e) $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$;
 c) $P(x) = (x^3 - 8)(9 - x^2)$; f) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$.

(3 pkt.)Zadanie 7.13 (c.f. [2]) Zapisz wielomian $W(x)$ trzeciego stopnia, którego pierwiastkami są liczby: a, b, c , jeśli:

- a) $a = 1, b = -2, c = 4$ i $W(0) = 16$; b) $a = -1, b = -2, c = 1$ i $W(2) = -12$.

(3 pkt.)Zadanie 7.14 ([1]) Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3$.

(3 pkt.)Zadanie 7.15 (c.f. [1]) Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = 6x^4 + 7x^3 + 12x^2 + x - 2$.

(3 pkt.)Zadanie 7.16 Dla jakich liczb a i b liczba 2 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $x^3 + 4x^2 - ax + b$?

(3 pkt.)Zadanie 7.17 Uzupełnij tabelę znaków wiedząc, że $W(x) = (x + 5)(x - 3)(x + 1)^2(x - 4)^4(x - 7)^3$.

	$x \in (-\infty, -5)$	$x = -5$	$x \in (-5, -1)$	$x = -1$	$x \in (-1, 3)$	$x = 3$	$x \in (3, 4)$	$x = 4$	$x \in (4, 7)$	$x = 7$	$x \in (7, +\infty)$
$x + 5$											
$x + 1$											
$x + 1$											
$x - 3$											
$x - 4$											
$x - 4$											
$x - 4$											
$x - 4$											
$x - 7$											
$x - 7$											
$x - 7$											
$W(x)$											

Rozwiąż równanie: $W(x) = 0$.

Rozwiąż nierówność:

- a) $W(x) > 0$; b) $W(x) \leq 0$; c) $W(x) \geq 0$; d) $W(x) < 0$.

(3 pkt.)Zadanie 7.18 Rozwiąż nierówność:

$$a) -2(x+3)(x-\frac{1}{2})^2(x-4)^3(x+7)^4 > 0;$$

$$b) (2-x)^2(3-x)(x+2)(x+3)^3 \leq 0;$$

$$c) 7(x+2)(x-\frac{1}{3})(2x-1)(3x+2)^2 \geq 0;$$

$$d) (x-5)^5(3x+3)(2-x)^3(x+2) < 0.$$

Literatura

- [1] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona
- [2] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum*, Res Polona