

ARKUSZ 6

Liczby zespolone

Teorie, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach:

1. Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas *Algebra i geometria analityczna Definicje, twierdzenia, wzory* Oficyna Wydawnicza GiS Wrocław 2009,
2. Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas *Algebra i geometria analityczna Przykłady i zadania* Oficyna Wydawnicza GiS Wrocław 2009.

(3 pkt.) Zadanie 6.1. Udowodnij, że jeśli $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r \geq 0$, to

- a) $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ b) $\frac{1}{z} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ o ile $z \neq (0,0)$
c) $-z = r(\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi))$ d) $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

(5 pkt.) Zadanie 6.2. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej wykonać mnożenie

- a) $2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \cdot 3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$
b) $\sqrt{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \cdot 2\sqrt{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ c) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$
d) $(4+4i)(-3+3i)$ e) $-2i \cdot (1+\sqrt{3}i)$ f) $(1-\sqrt{3}i) \cdot (1+\sqrt{3}i)$
g) $\frac{2+2i}{1-i}$ h) $\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$ i) $\frac{3i}{1+i}$

(5 pkt.) Zadanie 6.3. Oblicz korzystając ze wzoru Moivre'a

- a) $(1+i)^{10}$ b) $(\sqrt{3}-i)^{60}$ c) $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{44}$
d) $\left(\sin \frac{\pi}{12} - i\cos \frac{\pi}{12}\right)^{18}$ e) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ f) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$

(5 pkt.) Zadanie 6.4. Znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki

- a) $\arg[(1+i)z] = \frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4} \leq \arg \frac{i}{z} \leq \frac{\pi}{2}$
c) $\arg(z^4) = \pi$ d) $\arg(z^3) < \frac{\pi}{2}$

(5 pkt.) Zadanie 6.5. Wyrazić za pomocą $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$

- a) $\cos 5\alpha$ b) $\cos 6\alpha$ c) $\sin 5\alpha$ d) $\sin 6\alpha$

(3 pkt.) Zadanie 6.6. Oblicz

- a) $e^{\pi i}$ b) $e^{2\pi i}$ c) $e^{\frac{i\pi}{2}}$ d) $e^{-\frac{4}{3}\pi i}$ e) e^i f) e^{-2i} .

(3 pkt.) Zadanie 6.7. Zapisz w postaci wykładniczej

a) $1+i$

b) $-i$

c) i

d) $1+\sqrt{3}i$

(5 pkt.) Zadanie 6.8. Oblicz podane pierwiastki

a) $\sqrt[3]{i}$

b) $\sqrt[4]{i}$

c) $\sqrt{-3+4i}$

d) $\sqrt[3]{-2-2i}$

(5 pkt.) Zadanie 6.9. Wyznacz wszystkie pierwiastki

a) $\sqrt[3]{8i}$

b) $\sqrt[8]{1}$

c) $\sqrt[6]{-27}$

d) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

(5 pkt.) Zadanie 6.10. Wyznacz wszystkie liczby zespolone spełniające warunki

a) $z^2+1=0$

b) $z^2+4i=0$

c) $\frac{z+2}{i-1}=\frac{3z+i}{2+i}$

d) $\operatorname{Re} z=2+3\operatorname{Im} z$