ARKUSZ 3

Trygonometria 3

Teorię, jak również przykłady. pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujacych książkach (dostępnych w czytelni biblioteki wydziałowej - zachędzamy do ich czytania)

1. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona, dział "Funkcje trygonometryczne", rozdziały: 5.8.
2. M. Fabijańczyk, A. Fabijańczyk, *Matematyka elementarna, kompendium wiedzy z wybranych działów*, Wydawnictwo UŁ, dział "Tygonometria", rozdziały: 13.4, 13.6.

(3 pkt.)Zadanie 3.1 ([1]) *Rozwiąż równanie.*

a) $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, *jeśli* $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, *jeśli* $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

c) $\operatorname{tg} x = 2-\sqrt{3}$, *jeśli* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

(3 pkt.)Zadanie 3.2 ([2]) *Rozwiąż równanie.*

a) $\sin x = \sin\frac{\pi}{7}$,

b) $\cos x = \cos\frac{2}{3}\pi$,

c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{3}{5}\pi$,

d) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\frac{2}{9}\pi$,

e) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{12}$,

f) $\cos\left(x+\frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$,

g) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3}{8}\pi$,

h) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$,

i) $\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{16}$.

(3 pkt.)Zadanie 3.3 ([1]) *Rozwiąż równanie.*

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

d) $\operatorname{ctg} x = -1$,

e) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$,

f) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

g) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$,

h) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = 1$.

(3 pkt.)Zadanie 3.4 (cf. [2]) *Rozwiąż równanie.*

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$,

b) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

c) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$,

d) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = -1$,

(3 pkt.)Zadanie 3.5 ([1]) *Wyznacz rozwiązanie równania:*

a) $\sin 4x = 1$, *jeśli* $x \in [0,\pi]$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right) = \frac{1}{2}$, *jeśli* $x \in [2\pi, 3\pi]$;

c) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = -1$, *jeśli* $x \in (5\pi, 6\pi)$;

d) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$, *jeśli* $x \in (-10\pi, -\pi)$.

(3 pkt.)Zadanie 3.6 ([1]) *Rozwiąż równanie.*

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin 2x$,

b) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$,

c) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

d) $\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

e) $\sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos x$,

f) $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$,

g) $\mathrm{tg}\, 3x = \mathrm{ctg}\, 5x$,

h) $\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

(5 pkt.)Zadanie 3.7 ([1]) *Rozwiąż równanie.*

a) $2\sin x \cdot \cos x = \cos x$,

b) $\mathrm{tg}\, x \cdot \cos x - \sin 2x = 0$,

c) $\sin x + \mathrm{ctg}(2x)\cos(\pi - x) = 0$.

(5 pkt.)Zadanie 3.8 ([2]) *Równanie* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ *można rozwiązać w następujący sposób:*

Dziedziną równania jest zbiór $\mathbb{R}$.

$$\sin x + \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\cos x = \sqrt{2} \quad | \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$
$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Postępujac w analogiczny sposób, rozwiąż równanie:

a) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3$,

b) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = \sqrt{6}$,

c) $2\sin x - \sqrt{12}\cos x = 2\sqrt{2}$,

d) $\sin 2x + \sin\frac{\pi}{4} = \cos 2x$.

(5 pkt.)Zadanie 3.9 ([2]) *Równanie* $(1-\sqrt{3})\cos^2 x + (1+\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x = 1$ *można rozwiązać w następujący sposób:*

Dziedziną równania jest zbiór $\mathbb{R}$.

$$(1-\sqrt{3})\cos^2 x + (1+\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \quad | : \cos^2 x,\ \cos x \neq 0.$$

Jeśli $\cos x = 0$, to lewa strona równania jest równa 0, a prawa strona równania jest równa 1. Zatem $\cos x \neq 0$.

$$1 - \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}^2 x + 1$$
$$\mathrm{tg}^2 x - (1+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$$
$$t = \mathrm{tg}\, x$$
$$t^2 - (1+\sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$$
$$\Delta = (1+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = (1-\sqrt{3})^2$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - 1$$
$$t = 1 \vee t = \sqrt{3}$$
$$\mathrm{tg}\, x = 1 \ \mathit{lub}\ \mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$$

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Postępujac w analogiczny sposób, rozwiąż równanie: $(\sqrt{3} - 3)\sin^2 x - \left(1.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin 2x = \sqrt{3}$.

(5 pkt.)Zadanie 3.10 ([2]) *Rozwiąż równanie.*

a) $(\operatorname{tg} x + \sin x)\cos x = (\operatorname{tg} x + \sin x)\sin x$,

b) $2\operatorname{tg} x + \cos x = \frac{2}{\cos x}$,

c) $\sin 3x \cdot \cos 2x + 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}$,

d) $\cos x + \cos 2x = 2$,

e) $\sin 4x + 2\sin^2 x - 1 = 0$,

f) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = \frac{5}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

g) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$,

h) $2\sin x + 2\cos x - \operatorname{tg} x = 1$.

(5 pkt.)Zadanie 3.11 (cf. [2]) *Rozwiąż równanie.*

a) $\sin 5x + \sin 3x = 0$,

b) $\cos 4x + \cos 2x = 2\cos x$,

c) $\sin 3x + \sin x = \sin 4x + \sin 2x$,

d) $\cos 3x + \sin x = \sin 3x + \cos x$.

(5 pkt.)Zadanie 3.12 ([3]) *Dla jakich wartości parametru a równanie ma rozwiązanie?*

a) $\sin x = \frac{2}{a}$,

b) $\cos x = \frac{5a-2}{2-3a}$,

c) $\operatorname{ctg} x = \frac{8}{4-a^2}$,

d) $\operatorname{tg} x = \frac{7a+11}{a^2-49}$,

Literatura

[1] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona

[2] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum*, Res Polona

[3] Д.П.Дорохин, З.Е. Плаксенко, Г.Ф.Бажора, *СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ*