

ARKUSZ 2

Trygonometria 2

Teorię, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach (dostępnych w czytelní biblioteki wydziałowej - zachęcamy do ich czytania):

1. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona, dział "Funkcje trygonometryczne", rozdziały: 5.3, 5.6, 5.7.
2. M. Fabijańczyk, A. Fabijańczyk, *Matematyka elementarna, kompendium wiedzy z wybranych działów*, Wydawnictwo UŁ, dział "Trygonometria", rozdziały: 13.3, 13.4, 13.5.

(3 pkt.)Zadanie 2.1 ([1]) Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie 3. Wiedząc, że $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, oblicz $f(7)$, $f(-12)$ i $f(35)$.

(3 pkt.)Zadanie 2.2 ([1]) Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie zasadniczym równym 4. Fragment wykresu funkcji f dla $x \in [0, 2]$ jest odcinkiem o końcach $A(0, 0)$ i $B(2, 2)$, a dla $x \in [2, 4]$ odcinkiem o końcach $B(2, 2)$ i $C(4, 0)$. Narysuj fragment wykresu funkcji f dla $x \in [-8, 0]$. Oblicz $f(25)$.

(3 pkt.)Zadanie 2.3 ([1]) Funkcja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie 6. Dla $x \in [-3, 3]$ odpowiednie fragmenty wykresów funkcji g i $x \mapsto 9 - x^2$ pokrywają się.

- a) Wskaż największą i najmniejszą liczbę należącą do zbioru $\{g(-20.5), g(-4), g(-7), g(12), g(77)\}$.
- b) Sprawdź, czy funkcja g jest monotoniczna w przedziale $(11, 14)$.

(3 pkt.)Zadanie 2.4 ([1]) Uzasadnij, korzystając z parzystości (nieparzystości) oraz okresowości odpowiedniej funkcji, że:

- a) $\cos(710^\circ) = \cos(370^\circ)$,
- b) $\sin 237^\circ + \sin 483^\circ = 0$,
- c) $\operatorname{tg}(-100^\circ) = -\operatorname{tg}(640^\circ)$,
- d) $\operatorname{ctg} 320^\circ + \operatorname{ctg} 400^\circ = 0$.

(3 pkt.)Zadanie 2.5 ([1]) Wyznacz okres zasadniczy funkcji f , jeśli:

- a) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$,
- b) $f(x) = \sin 3x$,
- c) $f(x) = \operatorname{tg} 4x$.

(3 pkt.)Zadanie 2.6 ([1]) Oblicz:

- a) $\sin \frac{7}{3}\pi$,
- b) $\cos 3\frac{1}{6}\pi$,
- c) $\operatorname{tg} 390^\circ$,
- d) $\operatorname{ctg} 510^\circ$,
- e) $\sin 840^\circ$,
- f) $\cos 5\frac{1}{4}\pi$,
- g) $\operatorname{tg} 9\frac{2}{3}\pi$,
- h) $\operatorname{ctg} 3\frac{1}{4}\pi$.

(3 pkt.)Zadanie 2.7 ([1]) Oblicz:

- a) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, jeśli $\cos \alpha = 0, 35$;
- b) $\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha)$, jeśli $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -0, 2$;
- c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, jeśli $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -3$;
- d) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$, jeśli $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -2, 5$;
- e) $\operatorname{tg}(2\frac{1}{2}\pi - \alpha)$, jeśli $\operatorname{ctg}(3\frac{1}{2}\pi - \alpha) = 0, 8$;
- f) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, jeśli $\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = 0, 75$.

(5 pkt.)Zadanie 2.8 (cf. [1]) Oblicz:

a) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, jeśli $\sin\left(\alpha - 7\frac{1}{2}\pi\right) = 0,9$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$;

b) $\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$, jeśli $\cos\left(3\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = 0,2$ i $\alpha \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$;

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, jeśli $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -4$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(3 pkt.)Zadanie 2.9 (cf. [1]) Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia: $1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\sin^4(\pi - \alpha)$.

(3 pkt.)Zadanie 2.10 ([2]) Oblicz

a) $\sin\alpha$, jeśli $\sin(\pi - \alpha) = \frac{2}{9}$;

d) $\cos\alpha$, jeśli $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0,7$;

b) $\sin\alpha$, jeśli $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$;

e) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 4$;

c) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -3$;

f) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 2$.

(5 pkt.)Zadanie 2.11 ([2]) Oblicz:

a) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$, jeśli $\cos(2\pi - \alpha) = 0,2$;

b) $\cos(\pi + \alpha)$, jeśli $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{1}{3}$;

c) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, jeśli $\sin(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$ i α jest kątem III ćwiartki układu współrzędnych;

d) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$, jeśli $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = 3$ i α jest kątem IV ćwiartki układu współrzędnych.

(3 pkt.)Zadanie 2.12 ([2]) Sprawdź, czy zachodzi tożsamość:

a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$;

d) $\left(\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\alpha$;

b) $\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{3 - \frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}} = \cos\frac{\pi}{3}$;

c) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\alpha$;

e) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 1 = \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

(3 pkt.)Zadanie 2.13 ([2]) Uzasadnij, że:

a) $\sin 11^\circ = \sin 169^\circ$;

b) $\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{ctg} 115^\circ = 0$;

c) $\cos 140^\circ + \cos 40^\circ = 0$.

(3 pkt.)Zadanie 2.14 ([1]) Naskicuj wykres funkcji sinus w przedziale $[-\pi, \pi]$.

a) Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji sinus należące do przedziału $[-\pi, \pi]$.

b) Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji sinus zawarte w przedziale $[-\pi, \pi]$.

c) Uzupelnij tabelę, jeśli $x \in [-\pi, \pi]$.

x	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$\sin x$			0,5	$0,5\sqrt{2}$				

d) Odczytaj z wykresu, dla jakich $x \in [-\pi, \pi]$ zachodzą poszczególne nierówności: $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- b) w przesunięciu o wektor o współrzędnych $[\frac{\pi}{2}, 0]$;
- c) w przesunięciu o wektor o współrzędnych $[2\pi, 0]$;
- d) w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Czy funkcja f jest funkcją trygonometryczną? Narysuj wykres funkcji f .

Zadanie 2.20 (cf. [2]) Podaj wzór funkcji f , której wykres jest obrazem wykresu funkcji tangens:

- a) w przesunięciu o wektor o współrzędnych $[-\frac{\pi}{2}, 0]$;
- b) w przesunięciu o wektor o współrzędnych $[\frac{\pi}{2}, 0]$;
- c) w przesunięciu o wektor o współrzędnych $[\pi, 0]$;
- d) w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Czy funkcja f jest funkcją trygonometryczną? Narysuj wykres funkcji f .

(5 pkt.)Zadanie 2.21 ([2]) Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem:

- a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$;
- b) $f(x) = 1 + \sin x$;
- c) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$;
- d) $f(x) = -2 + \cos(x - \pi)$;
- e) $f(x) = \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4})$;
- f) $f(x) = -\operatorname{tg} x$.

(5 pkt.)Zadanie 2.22 ([1]) Naskicuj wykres funkcji f , jeśli funkcja f określona jest wzorem:

- a) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $x \in [0, 4\pi]$;
- b) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$, $x \in (-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$;
- c) $f(x) = \sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$;
- d) $f(x) = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2})$, $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$;
- e) $f(x) = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{2})$, $x \in [0, 2\pi]$;
- f) $f(x) = \cos x + |\cos x|$, $x \in [0, \pi]$.

(3 pkt.)Zadanie 2.23 ([2]) Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

- a) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$;
- b) $f(x) = \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4})$;
- c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
- d) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{7})$;
- e) $f(x) = \cos x + \operatorname{tg}(x - \frac{2}{3}\pi)$;
- f) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2})$.

Literatura

- [1] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona
- [2] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum*, Res Polona