

ARKUSZ 1

Oznaczenia:

\mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych;

\mathbb{N} - zbiór liczb naturalnych większych od zera tzn. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

\mathbb{Q} - zbiór liczb wymiernych;

\mathbb{Z} - zbiór liczb całkowitych;

\mathbb{C} - zbiór liczb zespolonych.

Trygonometria 1

Teorię, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach (dostępnych w czytelni biblioteki wydziałowej - zachęcamy do ich czytania):

1. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żyłak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona, dział "Funkcje trygonometryczne", rozdziały: 5.1, 5.2, 5.4, 5.5.
2. M. Fabijańczyk, A. Fabijańczyk, *Matematyka elementarna, kompendium wiedzy z wybranych działów*, Wydawnictwo UŁ, dział "Tygonometria", rozdziały: 13.1, 13.2, 13.3.

(3 pkt.)Zadanie 1.1 ([1]) W trójkącie ABC dane są: $|\overline{AC}| = 4$, $|\overline{BC}| = 2\sqrt{5}$, $|\angle ACB| = 90^\circ$. Oblicz

a) $\operatorname{ctg} \angle ABC$,

b) $\sin \angle CAB$,

c) $\cos \angle CAB$.

(3 pkt.)Zadanie 1.2 ([1]) Oblicz $\cos \angle CAB$ i $\operatorname{tg} \angle CAB$, znając współrzędne punktów: $A(1, 3)$, $B(5, 1)$, $C(5, 3)$.

(3 pkt.)Zadanie 1.3 ([2]) Wyznacz miarę główną kąta skierowanego o mierze:

a) 830° ,

b) 1720° ,

c) -435° ,

d) -900° .

(3 pkt.)Zadanie 1.4 ([2]) Przedstaw podaną miarę kąta skierowanego w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie α jest miarą główną i $k \in \mathbb{Z}$:

a) -130° ,

b) 900° ,

c) 1970° ,

d) -2130° .

(3 pkt.)Zadanie 1.5 (cf. [2]) Wskaż pary kątów skierowanych równych:

a) 1310° i -490° ,

b) 1564° i 506° ,

c) -747° i 1773° ,

d) 1530° i 5040° .

(3 pkt.)Zadanie 1.6 (cf. [2]) Wskaż pary przeciwnych kątów skierowanych:

a) 20° i 340° ,

b) 867° i -147° ,

c) 1206° i -86° ,

d) -60° i -660° .

(3 pkt.)Zadanie 1.7 (cf. [2]) Wyznacz miarę główną sumy kątów skierowanych o miarach α i β , jeśli:

a) $\alpha = 210^\circ$ i $\beta = 190^\circ$,

c) $\alpha = -240^\circ$ i $\beta = -280^\circ$,

b) $\alpha = 300^\circ$ i $\beta = -450^\circ$,

d) $\alpha = -280^\circ$ i $\beta = 680^\circ$.

(3 pkt.)Zadanie 1.8 ([2]) Zaznacz w układzie współrzędnych kąt o podanej mierze:

- a) 225° , c) 840° , e) $\frac{5}{6}\pi$, g) $5\frac{1}{4}\pi$,
b) -300° , d) -510° , f) $-\frac{3}{8}\pi$, h) $-3\frac{2}{9}\pi$.

(3 pkt.)Zadanie 1.9 ([2]) Podaną miarę łukową zamień na miarę stopniową:

- a) $\frac{5}{3}\pi$, b) $-2\frac{1}{4}\pi$, c) $5\frac{7}{8}\pi$, d) $3,3\pi$.

(3 pkt.)Zadanie 1.10 ([2]) Podaną miarę stopniową zamień na miarę łukową:

- a) 75° , b) -330° , c) 240° , d) 960° .

(3 pkt.)Zadanie 1.11 ([2]) Zapisz miarę kąta skierowanego γ w postaci $\alpha + k \cdot \beta$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą i $\alpha \in (-\pi, \beta)$, jeżeli:

- a) $\beta = \frac{2}{3}\pi$, $\gamma = 16\pi$; b) $\beta = \frac{3}{4}\pi$, $\gamma = 7\frac{1}{4}\pi$; c) $\beta = 1\frac{1}{8}\pi$, $\gamma = 4\frac{2}{3}\pi$.

(3 pkt.)Zadanie 1.12 (cf. [2]) Czy zbiory X i Y są równe?

- a) $X = \{x : x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{x : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
b) $X = \{x : x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{x : x = \frac{2}{3}\pi + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
c) $X = \{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{x : x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(3 pkt.)Zadanie 1.13 ([2]) Punkt P leży na końcowym ramieniu kąta skierowanego o mierze α w układzie współrzędnych. Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$:

- a) $P(-3, 4)$; b) $P(1, 3)$; c) $P(-2, -4)$; d) $P(5, -\sqrt{11})$.

(3 pkt.)Zadanie 1.14 ([2]) Wykorzystując definicję funkcji trygonometrycznych, oblicz:

- a) $\operatorname{tg} 210^\circ$, b) $\sin 330^\circ$, c) $\operatorname{ctg} \frac{2}{3}\pi$, d) $\cos \frac{7}{4}\pi$.

Zadanie 1.15 ([3]) Kątem której ćwiartki układu współrzędnych jest kąt skierowany α , jeśli:

- a) $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha > 0$; c) $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ i $\cos \alpha < 0$; e) $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$;
b) $\operatorname{tg} \alpha < 0$ i $\sin \alpha > 0$; d) $\sin \alpha < 0$ i $\operatorname{ctg} \alpha > 0$; f) $\sin \alpha < 0$ i $\cos \alpha > 0$?

(3 pkt.)Zadanie 1.16 ([2]) Wiedząc, że α oznacza miarę główną pewnego kąta skierowanego, oblicz:

- a) $\sin(\alpha + 2\pi)$, jeśli $\sin \alpha = 0,9$; c) $\operatorname{tg}(\alpha - 6\pi)$, jeśli $\operatorname{tg} \alpha = 0,7$;
b) $\cos(\alpha + 4\pi)$, jeśli $\cos \alpha = 0,3$; d) $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi)$, jeśli $\sin \alpha = 0,9$.

(3 pkt.)Zadanie 1.17 ([2]) Zaznacz w układzie współrzędnych kąt skierowany o mierze α , jeśli:

- a) $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ i $\sin \alpha = 0,8$; c) $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ i $\operatorname{ctg} \alpha = 2$;
b) $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$ i $\cos \alpha = 0,6$; d) $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

(5 pkt.)Zadanie 1.18 ([2]) Oblicz:

a) $\sin \alpha$, jeśli $\cos \alpha = -0,2$ i $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$;

c) $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\cos \alpha = 0,6$ i $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$;

b) $\cos \alpha$, jeśli $\sin \alpha = 0,8$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$;

d) $\operatorname{ctg} \alpha$, jeśli $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

(5 pkt.)Zadanie 1.19 ([2]) Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, jeśli:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$;

b) $\operatorname{ctg} \alpha = -2$ i $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

(3 pkt.)Zadanie 1.20 ([2]) Sprawdź, czy dla dowolnego α , dla którego zapis ma sens, zachodzi równość:

a) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$,

d) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$,

b) $1 - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot (2 - \sin^2 \alpha)$,

e) $\frac{(1-\operatorname{ctg} \alpha)(1+\operatorname{ctg} \alpha)}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha)} = 1 - 2 \cos^2 \alpha$,

c) $(3 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2 = 10$,

f) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = 1 - 2 \cos^2 \alpha$.

(5 pkt.)Zadanie 1.21 ([3]) Sprawdź, czy zachodzi tożsamość:

a) $\frac{1-\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha$,

c) $\frac{1+\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1}$,

b) $1 + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$,

d) $(1 - \operatorname{tg} \alpha)(2 - \operatorname{ctg} \alpha) = 3 - \frac{2-\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

(5 pkt.)Zadanie 1.22 ([4]) Sprawdź, czy zachodzi tożsamość:

a) $\frac{1+\operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$,

c) $\frac{1-\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$,

b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin^2 \alpha$,

d) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

Literatura

- [1] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Res Polona
- [2] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku - podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, Res Polona
- [3] R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum*, Res Polona
- [4] Д.П.Дорохин, З.Е.Плаксенко, Г.Ф.Бажора, *СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ*