

ARKUSZ 5

Liczby zespolone

Teorie, jak również przykłady pomagające rozwiązać zadania zamieszczone w tym arkuszu można znaleźć w następujących książkach:

1. Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas *Algebra i geometria analityczna Definicje, twierdzenia, wzory* Oficyna Wydawnicza GiS Wrocław 2009,
2. Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas *Algebra i geometria analityczna Przykłady i zadania* Oficyna Wydawnicza GiS Wrocław 2009.

(3 pkt.) Zadanie 5.1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby oraz podaj ich postać algebraiczną

- a) $(3, -2)$ b) $(0, 1)$ c) $(2, 0)$ d) $(-2, 2)$

(3 pkt.) Zadanie 5.2. Wykonaj działania na liczbach zespolonych

- a) $(1, 2) + (2, 3)$ b) $(3 - 2i) + (i + 2)$ c) $(a + bi) + (c + di)$
d) $(f, g) + (g, -f)$ e) $(5, 4) - (2, -3)$ f) $(2 + i) + (3 - 6i) - (1 - i)$
g) $(a + bi) - (2a - 3bi)$ h) $(2 - 5i) \cdot (8 - 3i)$ i) $(5 + i\sqrt{3}) \cdot (5 - i\sqrt{3})$
j) $(5, -2) \cdot (5 - 5i)$ k) $(2 + i\sqrt{2}) \cdot (i\sqrt{2})$

(3 pkt.) Zadanie 5.3. Wykonaj działania na liczbach zespolonych

- a) $\frac{5}{\sqrt{5}i}$ b) $\frac{2}{1-i}$ c) $\frac{1+i}{1-i}$ d) $\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$
e) $\frac{7-3i}{1+3i}$ f) $\frac{4-2i}{1+3i}$ g) $(2+i\sqrt{5})^2$ h) $(1+i\sqrt{3})^3$
i) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ j) $(1+i)^2 \cdot (1-i)^3$ k) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

(3 pkt.) Zadanie 5.4. Skróć ułamki

- a) $\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$ c) $\frac{28}{\sqrt{15+i\sqrt{13}}}$ d) $\frac{a^2+b^2}{a-bi}$ e) $\frac{a^2+b^2}{a+bi}$

(3 pkt.) Zadanie 5.5. Uzasadnij równości (z, z_1, z_2 oznaczają liczby zespolone)

- a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ b) $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$ c) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$
d) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$ e) $\operatorname{Re} \frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{Re}(\overline{z_2} \cdot z_1)}{|z_2|^2}$ o ile $z_2 \neq (0, 0)$

(5 pkt.) Zadanie 5.6. Oblicz moduł i argument główny liczby zespolonej

- a) $3i$ b) -2 c) $1+i$ d) $-1-i$
e) $2+2\sqrt{3}i$ f) $2-2\sqrt{3}i$ g) $-2+2\sqrt{3}i$ h) $-2-2\sqrt{3}i$

i) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ j) $-\sqrt{3} - i$ k) $-\pi$

(3 pkt.) Zadanie 5.7. Udowodnij, że dla liczb zespolonych z, z_1, z_2 zachodzą związki

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ b) $|\bar{z}| = |z|$
 c) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ d) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ o ile $z_2 \neq (0,0)$

(3 pkt.) Zadanie 5.8. Oblicz moduł liczby zespolonej

a) $(1+2i)(3-4i)$ b) $\frac{4+i}{3+2i}$ c) $(1+\sqrt{2}i)^4$ d) $\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}+2i)^3}$

(3 pkt.) Zadanie 5.9. Udowodnij, że dla liczb zespolonych z, z_1, z_2 zachodzą związki

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
 d) $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)}$ o ile $z_2 \neq (0,0)$ e) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ f) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$
 g) $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im} z$ h) $\overline{\bar{z}} = z$

(5 pkt.) Zadanie 5.10. Podać interpretację geometryczną zbioru liczb zespolonych spełniających warunek:

a) $|z+i|=3$ b) $|z+2-i| \leq 3$ c) $|z+5|=|3i-z|$ d) $|z+i|+|z-i|=2$
 e) $|\bar{z}+2-i| \leq |z|$ f) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ g) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$ h) $\operatorname{Re}(z+1) < 0$

(5 pkt.) Zadanie 5.11. Podać interpretację geometryczną zbioru liczb zespolonych spełniających warunek:

a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$ b) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ c) $\arg(z+1) = \pi$ d) $\arg(-z) = \frac{2}{3}\pi$
 e) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{6}$ f) $\arg \bar{z} = \frac{\pi}{4}$ g) $\frac{\pi}{6} \leq \arg\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{\pi}{2}$ h) $\arg(-\bar{z}) \geq \frac{\pi}{2}$

(5 pkt.) Zadanie 5.12. Podane liczby zespolone zapisz w postaci trygonometrycznej

a) i b) -1 c) $-i$ d) $-\sqrt{3} + i$
 e) $-\sqrt{3} - i$ f) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 g) $\sin \alpha + i \cos \alpha$ h) $\frac{5+i}{2+3i}$ i) $\frac{1+\cos \alpha + i \sin \alpha}{1+\cos \alpha - i \sin \alpha}$